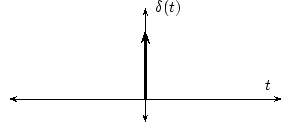
Sistemas lineales

Muchos fenómenos físicos quedan modelados matemáticamente por ecuaciones diferenciales lineales. Estas ecuaciones aparecen naturalmente al plantear las situaciones de equilibrio del sistema.

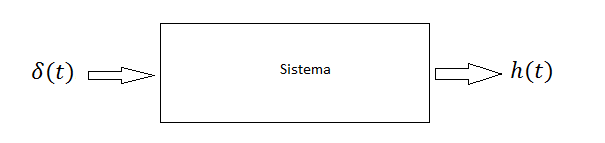
Las ecuaciones diferenciales lineales describen sistemas lineales y estos son aquellos que satisfacen el principio de superposición. Este establece que si una “causa” conduce a un “efecto” la amplificación de la causa por k determina la amplificación del efecto por k (siendo k=cte). Y el efecto conjunto de 2 “causas” diferentes es la suma de los efectos debido a cada causa consideradas por separado.

Sea la función impulso unitario



De manera que cualquier función puede ser representada mediante los impulsos unitarios

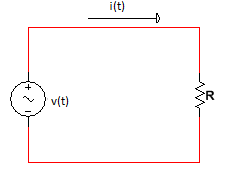
Sea la respuesta al impuslo de un sistema, de manera tal que si la entrada al sistema es la señal , su salida será



Por ende si la entrada al sistema es una señal , su salida será:

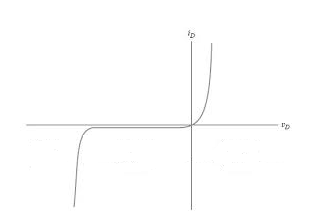
Sea:

Ejemplo práctico:



La ley de Ohm establece que R es constante independientemente de la tensión aplicada.

Representemos la característica tensión-corriente de un diodo



La gráfica indica claramente que estamos en presencia de un elemento no lineal. Un sistema no lineal a menudo puede ser representado alrededor de un punto por una serie de Taylor o Maclaurin (si ese punto es el origen) que son series de potencias. Usando la serie de Maclaurin:

Consideremos únicamente el tercer término que relaciona la entrada y la salida.

Consideremos a su vez por simplicidad que,

Por ende

y

Si

La corriente, es decir, la salida del sistema:

Sin lugar a dudas la suma de las señales de entrada que dan una señal de salida, no es igual dicha señal a la suma de las señales de salida por separado.

Si y fueran señales senoidales puras con frecuencias y a la salida tendríamos términos armónicos (); términos constantes; procesos de intermodulación ().

Marcadas ya las diferencias entre elementos lineales y no lineales. Vamos a ver los operadores matemáticos.

En el caso de un resistor la entrada es multiplicada por una constante; en este caso la forma de la excitación y la respuesta es la misma, solo se verá atenuada.

Un operador cambia la forma de la respuesta respecto de la entrada, es decir, transforma una función en otra función.

Un operador lineal hace una transformación lineal de manera que se cumpla el principio de superposición.

Operador Derivador

Tomemos un derivador y 2 funciones y que sean continuas y tengan derivadas continúas en el intervalo en que trabajamos.

Llegando a la conclusión que el operador diferencial es LINEAL.

Y las ecuaciones diferenciales describen sistemas lineales.

El operador integración

Por ende el operador integración también es lineal.

Una propiedad importante de los sistemas lineales es para el caso en que sea una señal senoidal:

Esto se debe al hecho de que el derivador y el integrar una función senoidal se obtiene la misma forma solo que es modificada en amplitud y fase.

Cualquier diferencia constituye una distorsión.

Operador Potencia

Los operadores no lineales son la potencia y la radicación:

De la misma manera se demuestra la radicación entendiéndose como una potencia fraccionaria.

Teoría de circuitos

La energía electromagnética puede ser:

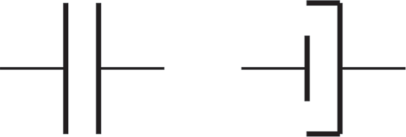
1. Almacenada como energía potencial por la existencia de un campo eléctrico (proceso reversible)
2. Almacenada como energía electrocinética por la existencia de un campo magnético (proceso reversible)
3. Convertida a otras formas de energía, por ejemplo calor (proceso irreversible)
4. Transferida de una parte del esquema eléctrico a otra parte a través de un campo electromagnético.

Conductores ideales: los procesos electromagnéticos responden a las ecuaciones de Maxwell; los campos y se encuentran distribuidos en el espacio. Pero en teoría de circuitos de elementos ideales, estos procesos se consideran concentrados y así un conductor real puede reemplazarse por un conductor ideal donde los parámetros distribuidos y convenientemente reemplazados por parámetros concentrados. R, C, L.

Además consideraremos que tanto el resistor, como el capacitor y el inductor son elementos ideales, esto es, reproducen un solo intercambio energético (parámetro principal) frente al cual se desprecian los otros (parámetros residuales). Es decir, el resistor solo implica intercambio con otra forma energética siendo este un proceso reversible, el capacitor solo hace referencia al almacenamiento de la energía potencial y el inductor al almacenamiento de la energía electrocinética. Por más de que haya cada uno de estos parámetros en cada componente.

Repasemos estos elementos:

Capacitor



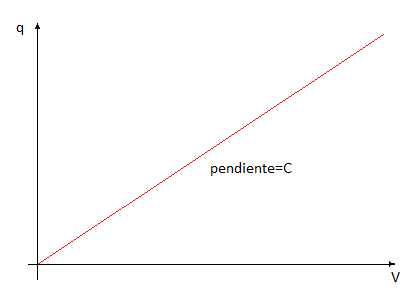
Es un elemento que caracteriza el almacenamiento de energía por la existencia de un campo eléctrico, el cual al estar aplicado en un espacio dieléctrico entre dos conductores, implica una diferencia potencial eléctrico y por lo tanto una energía potencial eléctrica sobre unidad de carga:

Donde es la posición de la placa 1 y la posición de la placa enfrentada.

Como se lo considera ideal no hay disipación energética ni concatenación de campo magnético.

Su parámetro característico es la capacitancia. Este queda caracterizado por la carga q en una de sus placas y la diferencia de potencial que existe entre ellas.

|  |
| --- |
|  |



*Característica lineal*

|  |
| --- |
|  |

Por ende la tensión es

|  |
| --- |
|  |

se asocia con la condición inicial.

Como se observa el capacitor al relacionar la tensión y la corriente por operadores diferenciales e integrales es un elemento lineal.

Su energía almacenada es:

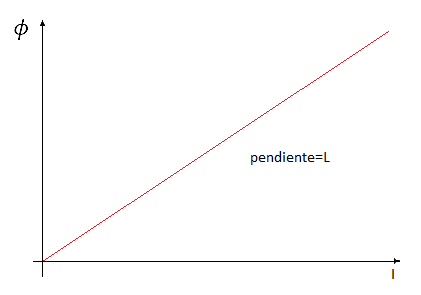
Inductor



Es un elemento que caracteriza el almacenamiento de energía en forma electrocinética debido a la presencia de un campo magnético. Este idealmente no disipa ni almacena carga eléctrica.

Su parámetro fundamental es la inductancia que caracteriza la corriente que lo atraviesa y el campo magnético concatenado.

|  |
| --- |
|  |



*Característica lineal*

La ley de Faraday establece que

a su vez lo que implica que

De esta manera concluimos:

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
|  |

El inductor al relacionar corriente y tensión por operadores diferenciales es un elemento lineal. Es importante resaltar que dicha linealidad en un inductor es solamente para un rango definido de corriente en inductores de núcleo ferromagnéticos, ya que la corriente genera el flujo magnético y estos materiales tienen una saturación del campo magnético a partir de la cual la inductancia empieza a disminuir en función de la corriente.

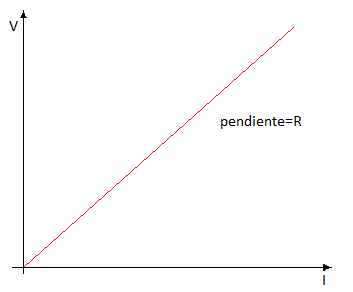
Su energía almacenada es:

Resistor



Es un elemento que caracteriza la disipación de energía electromagnética en forma irreversible. Idealmente no existe almacenamiento de energía, es decir, concatenación de campo ni almacenamiento de cargas.

Su parámetro característico es la resistencia la cual queda caracterizada por la tensión aplicada en sus bornes y la corriente que circula por dicho elemento:

*Relación lineal*

Al relacionar la tensión y la corriente mediante un factor es un elemento lineal.

Potencia:

Linealidad de los componentes

Como se observa todos los elementos, tantos capacitores, inductores y resistores se los considera lineales, es decir, las relaciones:

|  |
| --- |
| ; ; |

De llegado el caso de que la carga depende de la tensión exponencialmente en el capacitor, debido a que hay capacitores en donde la carga afecta mecánicamente al capacitor atrayendo las placas conductoras o que el flujo dependa de la corriente exponencialmente para el inductor, como un inductor de núcleo de ferromagnético y a su vez la tensión dependa exponencialmente de la corriente en un resistor. Estamos en presencia de componentes no lineales cuyo análisis no abarca este libro. Es por esto que se dejan de lado a su vez los componentes eléctricos construidos a partir de materiales semiconductores donde la relación tensión corriente no es constante y por lo tanto existe una resistencia dinámica.

Por ejemplo para el diodo, su resistencia es:

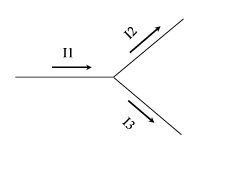
Veremos en breve como la linealidad nos permite utilizar una poderosa herramienta, la transformada de Laplace.

A su vez ante elementos no lineales, existe toda una disciplina, llamada control que se encarga de llevar a condiciones lineales los elementos para poder aplicar toda la teoría de ecuaciones diferenciales lineales y transformada de Laplace en su análisis.

Leyes de Kirchhoff

Dichas leyes nos ayudarán a plantear las ecuaciones de equilibrio de un circuito eléctrico.

Propiedad 1 – como los conductores ideales no pueden almacenar cargas eléctricas y los nodos se encuentran en conductores ideales, la suma de las cargas que llegan por unidad de tiempo a un nodo es igual a las suma de las cargas saliente por unidad de tiempo del nodo.



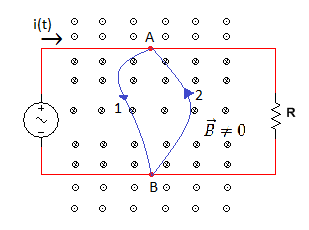
I1-I2-I3=0

Esta ley se conoce como la primera ley de Kirchhoff y establece que la suma algebraica de las corrientes que convergen en un nodo es cero. Se basa en la ley de la conservación de la carga.

Propiedad 2 – En un modelo circuital idealizado la concatenación de flujo magnético se encuentra concentrado únicamente en los inductores, lo que implica que la diferencia de potencial entre 2 nodos cualesquiera es independiente del camino seguido, lo que implica que el modelo circuital idealizado es potencial. Esto implica que la diferencia de potencial a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

Para entender un poco más este convenio, consideremos sin entrar en mucho detalle un caso real.

Supongamos que tenemos un generador de tensión variable que alimenta un resistor. Debido a la corriente se genera un campo de inducción magnética .



Tomando los puntos A y B en los cuales queremos poner de manifiesto su potencial. Y se toma 2 trayectorias cualesquiera 1 y 2; aplicando la ley de inducción electromagnética generalizada:

Donde es el flujo encerrado por la superficie. Como la corriente es variable implica que el campo magnético y por lo tanto el flujo también sean variables. Por lo tanto:

Integrando el campo eléctrico en la trayectoria cerrada que va de A aB por 1 y luego por la trayectoria que va de B a A por 2.

Haciendo un cambio en los límites de integración del primer término.

Con esto llegamos a la conclusión que como la variación del flujo magnético no es cero, tampoco lo es el potencial en la trayectoria cerrada de la superficie del flujo y

Por lo que no es posible aplicar el teorema de tensiones de Kirchhoff. Esto quiere decir que en un circuito real excitado por una señal variable la diferencia de potencial entre 2 puntos depende del camino seguido para calcularla y esta diferencia de potencial será mayor cuanto más rápido varíen los fenómenos electromagnéticos. Pero para proceso reales relativamente lentos el potencial creado por la variación del flujo tiende a cero. Y es cero en corriente continua, por lo que en corriente continua:

En el sistema ideal, en el cual el flujo magnético solo existe en el interior de los inductores debido a considerar que los conductores no concatenan campo.

La segunda ley de Kirchhoff en circuitos idealizados se deriva del principio de conservación de la energía, en donde la energía entregada es disipada en el resistor y almacenada en capacitores y/o inductores.

La energía entregada por la fuente es:

La energía disipada por el resistor:

La energía almacenada en inductor y capacitor:

Multiplicando ambos miembros por

Sabiendo que:

|  |
| --- |
|  |

La teoría de circuito es aplicable a problemas en la que la dimensiones físicas del esquema real son considerablemente menores a la longitud de onda de los campos electromagnéticos. Por ejemplo si el esquema es menor a 1 metro la limitación empieza a hacerse notar para frecuencias mayores a 100 [MHz].

Resolución de circuitos en el dominio temporal

Cuando se plantean las ecuaciones de equilibrio, siguiendo las leyes de Kirchhoff a un determinado circuito constituido por elementos lineales e ideales aparecen de manera natural las ecuaciones integro-diferenciales lineales, cuya solución (esto es encontrar la respuesta a una excitación) es lo que tratamos de encontrar.

Comencemos con un ejemplo simple.

Aquí lo que se quiere determinar es y(t) dada la excitación x(t)